

ΓΕΩΠΟΝΙΚΟ ΠΑΝ. ΑΘΗΝΩΝ – Φροντιστήριο Μαθηματικών
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – ΔΕΙΓΜΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ–με ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. α) [10] Έστω διανύσματα $b_1, b_2, \dots, b_k$. Πότε λέμε ότι είναι Γραμμικά Ανεξάρτητα;

ΛΥΣΗ Βλ. Ορισμό 4.1.4.1, σελ. 203. □

Αν $b_1 = (1, -1, 0)$, $b_2 = (0, 1, 2)$, $b_3 = (x, y, z)$, βρείτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη-συναρτήσει των x, y, z - έτσι ώστε τα b_1, b_2, b_3 να είναι Γρ. Ανεξάρτητα.

ΛΥΣΗ 1ος Τρόπος: Έστω η εξίσωση $a_1(1, -1, 0) + a_2(0, 1, 2) + a_3(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Αυτή είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1 + xa_3 &= 0 \\ -a_1 + a_2 + ya_3 &= 0 \\ 2a_2 + za_3 &= 0 \end{aligned}$$

Απαλοίφοντας το a_2 από την τελευταία εξίσωση, αυτή γίνεται $a_3(-2x - 2y + z) = 0$. Επειδή το a_3 θα πρέπει να είναι μηδέν, θα έχουμε υποχρεωτικά $-2x - 2y + z \neq 0$.

2ος Τρόπος: Έστω ο πίνακας A ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

Επειδή τα b_1, b_2, b_3 είναι Γρ. Ανεξάρτητα, η τάξη του A είναι ακριβώς 3. Συνεπώς, η ορίζουσά του $|A|$ θα πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός. Όμως $|A| = z - 2x - 2y$.

3ο Τρόπος: Αν ο A γίνει κλιμακωτός, τότε το στοιχείο στη θέση $_{33}$ είναι $z - 2x - 2y$. Επειδή η τάξη του A είναι τρία-και έτσι θα έχουμε τρεις οδηγούς-θα πρέπει να ισχύει $z - 2x - 2y \neq 0$. □

β) [10] Δώστε τον ορισμό του υποχώρου V του $\mathbb{R}^n$. Τι καλούμε βάση και διάσταση του V ;

ΛΥΣΗ Βλ. Ορισμούς 4.1.2, 4.1.6 και 4.1.7. □

Έστω ευθεία $\Lambda : x = 1 - t, y = t, z = 1 + t, t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η Λ δεν διέρχεται από το σημείο $(0, 0, 0)$. Τέλος, βρείτε μια βάση του υποχώρου W του $\mathbb{R}^3$ διάστασης ακριβώς 2 που περιέχει την Λ .

ΛΥΣΗ Αν η ευθεία περνούσε από το $(0, 0, 0)$ θα είχαμε $t = 1$ και $t = 0$ και $t = -1$, αδύνατο. Τώρα, ο υποχώρος W που ζητάμε δεν είναι άλλος από το επίπεδο Π που διέρχεται από το $(0, 0, 0)$ και περιέχει την Λ . Επειδή η διάσταση του W είναι 2, αρκεί να βρούμε δύο [Γρ. Ανεξ.] διανύσματα $u_1, u_2 \in W$. Δεν έχουμε, λοιπόν, παρά να βρούμε δύο σημεία πάνω στην Λ , π.χ. τα $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 2)$. Έτσι $u_1 = (1, 0, 1)$ και $u_2 = (0, 1, 2)$. □

γ) [5] Βρείτε την γενική λύση του

$$\begin{aligned}x - y + z + w &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 0\end{aligned}$$

ΛΥΣΗ Απαλοίφοντας το x από την δεύτερη εξίσωση, παίρνουμε $y + z - 2w = -4$, ή $y = -z + 2w - 4$. Αντικαθιστώντας την τιμή του y στην πρώτη εξίσωση, και λύνοντας ως προς x , έχουμε $x = -2z + w - 2$. Έτσι, η Γενική Λύση είναι: $(x, y, z, w) = (-2z + w - 2, -z + 2w - 4, z, w)$. $\square$

δ) [5] Έστω τρίγωνο T με κορυφές τα σημεία $A = (1, 0, 2), B = (0, -1, 3)$ και $\Gamma = (1, 0, -1)$. Να βρεθεί το εμβαδόν του T .

ΛΥΣΗ Έχουμε: $\vec{AB} = (-1, -1, 1)$ και $\vec{A\Gamma} = (0, 0, -3)$. Από το Παράδειγμα 4.35, σελ. 241, το εμβαδόν E του τριγώνου είναι

$$E = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{A\Gamma}| = \frac{1}{2} \sqrt{18}$$

2. α) [15] Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin x \sin 2x \, dx \quad \text{και} \quad \int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \, dx$$

ΛΥΣΗ

$$\int \sin x \sin 2x \, dx = \int \sin x \cdot 2 \sin x \cos x \, dx = \frac{2}{3} (\sin x)^3 + c$$

Αν $u = e^x$, έχουμε

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1} \, dx = \int \frac{1}{u^2 - 1} \, du = \frac{1}{2} \ln |u-1| - \frac{1}{2} \ln |u+1| = \frac{1}{2} \ln |e^x-1| - \frac{1}{2} \ln |e^x+1| + c$$

β) [10] Δώστε τον ορισμό μιας σειράς $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$.

ΛΥΣΗ Βλ. Ορισμό 3.2.1, σελ. 154. $\square$

Στη συνέχεια, βρείτε τα αθροίσματα των σειρών ή δείξτε ότι δεν υπάρχουν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

ΛΥΣΗ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 3^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3} \right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1/3}{1 + 1/3} = -\frac{1}{8}$$

Η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ είναι Γεωμετρική με λόγο $r = -1 \leq -1$ και έτσι αποκλίνει [Τύπος 3.6, σελ. 156]. $\square$

3. α) [10] Να βρεθεί συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\int f(x) dx = f(x) - x^2 + c, \quad f(0) = 1$$

ΛΥΣΗ Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε $f(x) = f'(x) - 2x$. Αν θέσουμε $y = f(x)$, παίρνουμε $y = y' - 2x$. Αυτή είναι μια Γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης με λύση την $y = ce^x - 2x - 2$. Αφού $y(0) = 1$, $c = 3$. Έτσι, η λύση της ΔΕς είναι: $y = 3e^x - 2x - 2$. $\square$

β) [5] Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $xy' = y^3$.

ΛΥΣΗ Αυτή είναι χωριζομένων μεταβλητών, και μετασχηματίζεται στην

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y^3, \quad \int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{-y^{-2}}{-2} = \ln|x| + c$$

4. α) [8] Δείξτε ότι οι επιφάνειες $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$ και $x^2 + y^2 = 4$ εφάπτονται στο σημείο $(2, 0, 2)$.

ΛΥΣΗ Για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει τα κάθετα διανύσματα στις δύο επιφάνειες στο $(2, 0, 2)$ να είναι παράλληλα. Πράγματι, το κάθετο διάνυσμα στην πρώτη είναι $(2x, 2y, 2(z - 2))|_{(2,0,2)} = (4, 0, 0)$. Όσο για την δεύτερη, παίρνουμε ακριβώς το ίδιο κάθετο διάνυσμα. $\square$

β) [10] Δίδεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - y^2 + x - 3y$. Να βρεθεί η διεύθυνση $\vec{u}$ στην οποία η κατά διεύθυνση παράγωγος της f στο σημείο $P = (1, -1)$ παίρνει ελάχιστη τιμή. Να βρεθεί, επίσης, η παραπάνω ελάχιστη τιμή.

ΛΥΣΗ Από το Θεώρημα 5.6.2 παίρνουμε ότι $\vec{u} = -\nabla f(1, -1) = (-3, 1)$ και η ελάχιστη τιμή είναι ίση με $-|(-3, 1)| = -\sqrt{10}$. $\square$

γ) [12] Να μελετήσετε τα κρίσιμα σημεία της $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy - 1$.

ΛΥΣΗ Έχουμε $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = 4y^3 - 4x$, $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = -4$. Τα κρίσιμα σημεία, βέβαια, είναι εκείνα όπου $f_x = 0$, $f_y = 0$. Οι λύσεις αυτού του συστήματος είναι οι $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$. Τέλος, εφαρμόζοντας το Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου [Θεώρημα 5.7.2], παίρνουμε ότι τα ως άνω σημεία είναι, σαγματικό, Τοπ. ελάχιστο και Τοπ. ελάχιστο, αντίστοιχα. $\square$